Od kilku lat Tomatinie rośnie konkurencja. W gminie Przytoczna w województwie lubuskim również pod koniec sierpnia organizowane jest Święto Pomidora. Bitwa pomidorowa w Przytocznej co prawda trwa tylko 45 minut, ale poprzedzają ją występy gwiazd polskiej estrady. W trakcie walk zużyte zostaje ponad pół tony pomidorów. To warzywa, które nie nadają się do sprzedaży.

Spróbujemy wprowadzić trochę matematyki do bitwy na pomidory.

Na początek kilka kluczowych założeń. Otóż umawiamy się, że uczestnicy bitwy stoją w miejscu i nie ma dwóch różnych par osób w tych samych odległościach między nimi. Każdy ma w ręku jednego pomidora i rzuca nim w najbliższego sąsiada.

W rozdziale tym przedstawimy i udowodnimy kilka, z pozoru nieoczywistych, własności, które ma bitwa pomidorowa. Udowodnimy na początku, że jeżeli liczba uczestników bitwy jest nieparzysta, to zawsze na placu boju pozostanie osoba, w którą nikt nie rzucił pomidorem. (Oczywiście milcząco zakładamy, że wszystkie rzuty są celne).

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej.

Zniecierpliwiony Czytelnik może w tym miejscu ominąć poniższe wywody i przejść bezpośrednio do dowodu tej własności. Chcielibyśmy bowiem w tym miejscu przypomnieć zasady indukcji matematycznej. Omówimy błędne, potoczne jej stosowanie, a na zakończenie części teoretycznej nagrodzimy wytrwałych dwoma dowcipami matematycznymi. (Tak, takowe istnieją i pojawi się ich więcej, ale ukryte będą w częściach teoretycznych).

Przypomnijmy zatem, że liczby naturalne tworzą zbiór $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$. Weźmy pod uwagę pewien podzbiór M zbioru liczb naturalnych, $M \subset N$. O zbiorze M wiemy, że 7 jest jego elementem, tzn. $7 \in M$. Wiemy również, że jeżeli jakaś liczba naturalna należy do M, to bezpośrednio po niej następująca liczba naturalna również jest składnikiem M, to znaczy

$$(k \in M) \rightarrow ((k+1) \in M).$$

Z tego wynika, że na przykład 11 też jest elementem M. Oczywiście: skoro 7 jest w M, to następna liczba, czyli 8, też jest w M. Mając 8, dostaniemy natychmiast, że i 9 jest w M. Z obecności 9 wynika obecność 10, a potem 11. Możemy takie rozumowanie powtarzać dla dowolnej liczby naturalnej większej od 7. Za każdym razem otrzymamy, że ona należy do M. Zatem M zawiera wszystkie liczby naturalne większe bądź równe 7,

$$M = \{7, 8, 9, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

Jeżeli o M wiemy, że zawiera liczbę 3, a z tego faktu, że pewna liczba jest elementem M, wynika, że również następna liczba jest elementem M, to wnioskujemy, że M zawiera wszystkie liczby naturalne, począwszy od 3,

$$M = \{3, 4, 5, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

Podsumowując, niech M będzie podzbiorem liczb naturalnych $M \subset N$. Niech k należy do M. Następnie wiemy, że jeżeli pewna liczba naturalna jest elementem M, to z tego wynika, że liczba bezpośrednio po niej następująca też należy do M. Wówczas wnioskujemy, że M zawiera wszystkie liczby naturalne, począwszy od k:

$$M = \{k, k+1, k+2, k+3, \dots\}.$$

Jeśli $k = 1$, to M składa się ze wszystkich liczb naturalnych, $M = N$.

Zasada ta jest wykorzystywana przy udowadnianiu twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.

Oznaczmy przez P pewną własność, którą spełniają jakieś liczby naturalne. Przez M oznaczymy zbiór liczb naturalnych spełniających własność P. Jeżeli 1 należy do M i z faktu, że pewna liczba należy do M, wynika, że następująca po niej również należy do M, to dostajemy, że $M = N$, czyli że wszystkie liczby naturalne spełniają własność P.

W praktyce zatem, jeżeli chcemy udowodnić twierdzenie dotyczące własności liczb naturalnych, to sprawdzamy najpierw, czy dana własność spełniona jest przez 1. Następnie zakładamy, że własność jest spełniona dla liczby naturalnej n i staramy się pokazać, że z tego założenia wynika, że własność ta jest również prawdziwa dla następnej liczby naturalnej, czyli $n + 1$. Gdy nam się to udaje, wówczas na mocy zasady indukcji otrzymujemy prawdziwość twierdzenia dla wszystkich liczb naturalnych.

Z pojęciem indukcji wiąże się wiele nieporozumień i anegdot. W potocznym rozumieniu indukcji, aby udowodnić pewną własność dotyczącą liczb naturalnych, wystarczy sprawdzić, czy jest ona prawdziwa dla kilku początkowych liczb naturalnych i... już. Nie ma nic bardziej mylnego. Oto kilka fascynujących historycznych przykładów.