Gdy dokonano precyzyjnej obserwacji kilku unieruchomionych na polach bitewnych czołgów niemieckich, odkryto, że każdy z nich ma wybity unikatowy numer seryjny skrzyni biegów. Numer seryjny pozwalał na znalezienie numeru porządkowego czołgu w procesie produkcji. Dysponując pewną partią przechwyconych czołgów, próbowano oszacować wysokość całkowitej produkcji. Stosując metodę, którą opiszemy niebawem, obliczono, że miesięczna produkcja czołgów w III Rzeszy wynosiła 246. Po wojnie ujawniono, że rzeczywista produkcja miesięczna wynosiła 245 czołgów. Szacowania były doskonałe!

Warto jeszcze na zakończenie dodać, że metody obliczeniowe oparte były na założeniu, że żaden czołg nie jest wyróżniony i że numery seryjne reprezentują próbkę losową spośród wszystkich czołgów z produkcji. Założenia te były możliwe na podstawie działania tzw. uogólnionej zasady kopernikańskiej opracowanej w XV wieku przez Mikołaja Kopernika.

Przystąpmy zatem do wyliczeń. Załóżmy, że pobieramy losową próbkę $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ zawierającą n elementów pochodzących ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób możemy oszacować N na podstawie analizy próbki $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.

Oznaczmy najpierw $Y = \max_{i=1,2,\ldots,n} x_i$. Obliczymy $p(Y = k)$ – prawdopodobieństwo, że maksymalna wartość elementu w próbce n-elementowej wynosi k (oczywiście $k = n, n+1, n+2, \ldots, N$)

$$p(Y = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}},$$

gdyż na $\binom{N}{n}$ sposobów możemy wybrać próbkę n-elementową ze zbioru liczącego N elementów oraz $\binom{k-1}{n-1}$ oznacza liczbę sposobów wyboru $k-1$ elementów ze zbioru $n-1$ elementowego, co gwarantuje, że maksymalnym elementem w próbce $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ będzie pewien $x_p = k$.

Zatem

$$E(Y)=\sum_{k=n}^{N}kp(Y=k)=\sum_{k=n}^{N}k\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=n}^{N}\frac{k(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}$$

$$=\frac{n}{\binom{N}{n}}\sum_{k=n}^{N}\frac{k!}{n!(k-n)!}=\frac{n}{\binom{N}{n}}\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}.$$

Wiadomo, że

$$\binom{k+1}{n+1}=\binom{k}{n}+\binom{k}{n+1}.$$

Możemy to wykazać, używając prostego kombinatorycznego argumentu. Mamy k kul czarnych i jedną białą. Spośród tych kul losujemy $n+1$ kul. Możemy to zrobić na $\binom{k+1}{n+1}$ sposobów. Z drugiej strony, wszystkie wybory możemy podzielić na dwie rozdzielne grupy. W jednej umieścimy te, które zawierają kulę białą. Jest tych możliwości $\binom{k}{n}$ – odkładamy białą kulę i z pozostałych losujemy n kul. W drugiej grupie umieszczamy te wybory, które nie zawierają białej kuli. Usuwamy białą i z pozostałych losujemy $n+1$ kul – $\binom{k}{n+1}$. Wobec tego mamy

$$\binom{k}{n}=\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}.$$

Wykorzystując ostatnią równość, dostajemy

$$\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{N}{n}$$

$$=\binom{n}{n}+\binom{n+2}{n+1}-\binom{n+1}{n+1}+\binom{n+3}{n+1}-\binom{n+2}{n+1}+\cdots+\binom{N+1}{n+1}-\binom{N}{n+1}$$

$$=\binom{N+1}{n+1}.$$

Zatem

$$E(Y)=\frac{n\binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}}=\frac{n(N+1)}{n+1}.$$