

# Iteracyjna optymalizacja parametrów w wybranych modelach

## 5.1. Uogólniony *model Holta*

Zagadnienie doboru najlepszych parametrów równań modeli wyrównywania wykładniczego przewija się w różnych publikacjach. Jest przedmiotem zarówno ustaleń przez specjalistę, obliczenia według określonego wzoru, czy też postępowania iteracyjnych zarówno manualnych, jak i komputerowych. W niniejszym materiale zwrócono uwagę na *modele Holta, Wintersa, Holta-Wintersa* oraz modele stanowiące uogólnienia rozwiązań tzw. klasycznych. Tematykę tę rozpatrzono w układzie przeglądu literaturowego, włączając w to źródła internetowe. Realizacje komputerowe bazujące na module prognozowania programu *WinQSB* oparto na danych statystycznych dotyczących konsumpcji piwa przez jednego mieszkańca w latach 1989–2010.

W modelu Holta do wygładzania szeregu czasowego stosuje się średnią ruchomą z odpowiednim parametrem. Szeregi takie cechuje występowanie wahań przypadkowych oraz trend, czyli tendencja rozwojowa badanego zjawiska. *Model Holta* jest jedną z metod wygładzania (wyrównywania) wykładniczego. Oprócz omawianego modelu m.in. stosowany jest także prosty model wyrównywania wykładniczego, *model Wintersa, model Holta-Wintersa*, a także do prognoz długoterminowych model trendu tłumionego z uwzględnieniem sezonowości addytywnej i multiplikatywnej. Zagadnienie optymalizacji iteracyjnej parametrów uogólnionego *modelu Holta*, każdorazowo w odniesieniu do kolejnych okresów prognozowania spotykamy w publikacji Romana Szostka<sup>1</sup>, który proponuje modyfikację *metody Holta* polegającą na:

- nieograniczaniu przedziału parametrów  $\alpha$  oraz  $\beta$  do  $[0, 1]$ ;
- ustalaniu najlepszych wartości tych parametrów kolejno dla okresu prognozowanego  $[n+1]$ ,  $[n+2]$ , ...,  $[n=T]$ , przy czym  $n$  to liczba obserwacji, a  $T$  ostatni z okresów prognozowania.

---

<sup>1</sup> R. Szostek, *Uogólniony model Holta na przykładzie prognozowania liczby pasażerów w transporcie lotniczym w Polsce*, „Ekonometria”, 2(36) 2012.

Umożliwia to stosowanie omawianego modelu *Holta* również do bardziej odległych okresów czasowych, przy czym model ten dla okresu  $t$  bazuje na równaniu:

$$F_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)F_{t-1} + S_{t-1} \quad (1)$$

oraz

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)(S_{t-1}) \quad (2)$$

gdzie:  $t = 2, \dots, n - 1$ ;  $F_t$  – wygładzona wartość szeregu czasowego;  $S_t$  – wygładzona wartość przyrostu trendu na okres  $t$ ;  $\alpha, \beta$  – parametry modelu; przy czym:  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  – wartości empiryczne prognozowanego szeregu;  $F_1 = x_1$ ;  $S_1 = x_1 - x_0$ .

Prognozy na kolejne okresy  $k = 1, 2, 3$ , przy założeniu okresu początkowego  $t = 0$  obliczamy rekurencyjnie według wzoru<sup>2</sup>:

$$x_{n+k-1}^* = F_{n-1} + kS_{n-1} \quad (3)$$

Wygasłe prognozy dla okresów  $t = 2, 3, \dots, n - 1$  obliczamy według wzoru:

$$x_t^* = F_{t-1} + S_{t-1} \quad (4)$$

Pozwala to nam na obliczenie błędów prognoz, a do oceny jakości stosować możemy średnią liniową lub średnią kwadratową  $J_2$  o postaci:

$$J_2 = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{t=2}^{n-1} (F_{t-1} + S_{t-1} - x_t)^2} \quad (5)$$

W kolejnych krokach dobieramy parametry  $\alpha$  oraz  $\beta$  tak, aby otrzymać najmniejszą optymalną wartość błędu, na przykład według miary  $J_2$ . Roman Szostek proponuje nieprzestrzeganie założenia, że<sup>3</sup>:

$$\alpha \in [0, 1] \quad \text{oraz} \quad \beta \in [0, 1]$$

Dla przyjętych dwóch miar jakości (liniowej, kwadratowej) oraz obliczeń ze skokiem 0,0001 dla parametrów  $\alpha$  oraz  $\beta$  przy wykorzystaniu specjalnego programu w języku (C++) uzyskano optymalne wartości tych parametrów. Dla miary kwadratowej  $\alpha = 1,5676$  a  $\beta = 0,1720$ , przy czym zwróćmy uwagę, że  $\alpha > 1$ . Umożliwia to sporządzenie wykresu punktowego na podstawie wzorów (1), (2), (4) modelu *Holta* obejmującego:

- $X_t$  – kolejne obserwacje zmiennej,
- $F_t$  – wygładzone wartości szeregu czasowego,
- $S_t$  – wygładzone wartości przyrostu trendu na okres  $t$ ,
- $X_t^*$  – dokładnie wyznaczone wygasłe prognozy.

<sup>2</sup> Ibidem, wzory zaczerpnięto z podanego wyżej artykułu.

<sup>3</sup> Ibidem, s. 18.

Natomiast przy zachowaniu ograniczenia przedziału  $[0, 1]$  i przyjętej przykładowo miary kwadratowej parametrów  $\alpha$  oraz  $\beta$  wynoszą:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0,3057$ .

Przy ustalaniu prognoz wygasłych krok prognozy ( $k = 1$ ). Jeśli chcemy jednak, aby przy pomocy modelu *Holta* ustalać prognozy na  $k$  okresów do przodu, to również musimy tak samo obliczać prognozy wygasłe oraz odpowiednio dobrać (przykładowo na podstawie miary kwadratowej) optymalne wartości parametrów  $\alpha$  oraz  $\beta$ . W takim przypadku minimalizujemy miarę jakości o następującej postaci:

$$J_2(k) = \sqrt{\frac{1}{n-k-1} \sum_{t=k+1}^{n-1} (F_{t-k} + kS_{t-1} - x_t)^2} \quad (6)$$

gdzie:  $k = 1, 2, 3, \dots$

Badania Szostka wykazały, że dzięki modyfikacji postępowania ze swobodą wartości parametrów  $\alpha$  oraz  $\beta$ , jak również ich odniesienia do liczby okresów prognozowania przy ustalaniu prognoz wygasłych doprowadzono do większej wiarygodności prognoz. Przez analogię można opracować kod programu dla przykładu danych spożycia piwa w przeliczeniu na 1 mieszkańca Polski zamieszczonych dalej w tabeli 5.14. Skorzystajmy jednak ze standardowego modułu w ramach pakietu *WinQSB*.

## 5.2. Modele wyrównywania wykładniczego w programie *WinQSB*

Dostępne oprogramowanie *WinQSB* w Internecie, pracujące pod *Windows XP*, umożliwia dla danego szeregu czasowego danych zastosowanie kolejno kilku modeli wyrównywania wykładniczego, a mianowicie<sup>5</sup>:

- prostego wyrównywania wykładniczego (SES),
- prostego wyrównywania wykładniczego z trendem (SEST),
- podwójnego wyrównywania wykładniczego (DES),
- podwójnego wyrównywania wykładniczego z trendem (DEST),
- adaptacyjnego wyrównywania wykładniczego (AES),
- modelu *Holta-Wintersa* z sezonowością addytywną (HWA),
- modelu *Holta-Wintersa* z sezonowością multiplikatywną (HWM).

W zakresie SEST istnieje w programie *WinQSB* opcja określenia najlepszych wartości parametrów. Po zainstalowaniu *WinQSB* postępowanie sprowadza się do:

- wywołania programu z dysku;
- wyboru modułu FC, a następnie wywołania z menu głównego kolejno: *File* (zbiór), *New problem* (nowy problem), *Problem type* (typ problemu) i wybór w ramach niego: *Time Series Forecasting* (szereg czasowy);

<sup>4</sup> Ibidem, zob. s. 22–23.

<sup>5</sup> W. Wornalkiewicz, *Dobór metod i parametrów w budowaniu modeli ekonometrycznych*, monografia, *Ekonomiczno-społeczne problemy współczesnego zarządzania i komunikacji*, M. Duczmał, T. Pokusa (red.), Wyższa Szkoła Zarządzania i Administracji, Opole 2008.