Pojęciem pierwotnym teorii mnogości jest zbiór, a relacją pierwotną relacja należenia[1] oznaczana symbolem $\in$. Zbiory są zmiennymi w formułach teorii mnogości. Oznaczamy je literami alfabetu łacińskiego lub greckiego (małymi i dużymi). Występują też litera alfabetu hebrajskiego: $\aleph$ (czytamy *alef*) oraz $\beth$ (czytamy *beth*) i $\gimel$ (czytamy *gimel*). Napis $x \in y$ oznacza więc, że zbiór x należy do zbioru y lub że x jest elementem zbioru y. Zaprzeczenie $\neg(x \in y)$ oznaczamy jako $x \notin y$. Warto podkreślić, że elementami zbiorów są zbiory, choć niekiedy nazywamy je punktami. Zamiast *zbiór zbiorów* używamy też określenia **rodzina zbiorów**, by podkreślić, że elementami są zbiory. **Aksjomaty teorii mnogości** Zermelo–Fraenkla, czyli teorii **ZF** nazwanej tak na cześć twórców, Zermelo [525] i Fraenkla [164], są następujące.

(A1) Aksjomat ekstensjonalności. Zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy, tzn.

$$\forall x \forall y (x = y \iff \forall z (z \in x \iff z \in y)).$$

(A2) Aksjomat zbioru pustego. Istnieje zbiór, do którego nie należy żaden element, tzn.

$$\exists u \forall y (y \notin u).$$

Z aksjomatu ekstensjonalności wynika, że zbiór u spełniający ten warunek jest jedyny, a więc możemy go oznaczyć symbolem $\emptyset$ powszechnie używanym w matematyce na określenie **zbioru pustego.** Każdy zbiór różny od zbioru pustego nazywamy **niepustym**.

(A3) Aksjomat nieskończoności. Istnieje taki zbiór s, że $\emptyset \in s$ i dla każdego $x \in s$ istnieje taki zbiór $y \in s$, którego elementami są wszystkie elementy zbioru x oraz sam zbiór x, tzn.

$$\exists s (\emptyset \in s \land (\forall x \in s)(\exists y \in s) \forall z (z \in y \iff (z \in x \lor z = x))).$$

Z aksjomatu nieskończoności wynika, że mogą istnieć nieskończone ciągi należeń postaci $x \in y \in z \in \ldots$

(A4) Aksjomat regularności[2]. W każdym zbiorze niepustym istnieje element minimalny w sensie relacji należenia, tzn.

$$\forall x (x \neq \emptyset \implies (\exists y \in x)(\forall z \in x)(z \notin y)).$$

Z aksjomatu regularności wynika, że nie istnieją nieskończone „wsteczne" ciągi należeń postaci $\ldots \in x \in y \in z$.

(A5) Aksjomat sumy. Dla każdego zbioru x istnieje zbiór y, którego elementami są te i tylko te zbiory, które należą do elementów zbioru x, tzn.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff \exists (u \in x)(z \in u)).$$

Podobnie jak powyżej, na mocy aksjomatu ekstensjonalności możemy napisać, że $y = \bigcup x$. Zbiór $\bigcup x$ nazywamy **sumą** zbioru x.

---

[1] Jak podają Kuratowski i Mostowski w monografii [301], symbol $\in$ wprowadził Peano jako skrót greckiego słowa $\epsilon\sigma\tau\iota$ oznaczającego *być*.

[2] Nazywany jest też aksjomatem ufundowania od angielskiego *foundation axiom*.

(A6) Aksjomat zbioru potęgowego. Dla każdego zbioru x istnieje taki zbiór y, którego elementami są te i tylko te zbiory, których wszystkie elementy należą do x, tzn.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Longleftrightarrow (\forall u \in z) u \in x).$$

Aksjomat ten łatwiej wysłowić, posługując się pojęciem **inkluzji**, czyli zawierania. Dla dowolnych z oraz x symbol $z \subseteq x$ oznacza, że $\forall u (u \in z \Longrightarrow u \in x)$. Mówimy wówczas, że z jest **podzbiorem** zbioru x lub że x jest **nadzbiorem** zbioru z, co oznaczamy też jako $z \supseteq x$. Jeśli $z \subseteq x$ oraz $z \neq x$, to piszemy $z \subsetneq x$ i mówimy, że z jest istotnie zawarty w x lub że z jest podzbiorem właściwym zbioru x. Korzystając z aksjomatu ekstensjonalności, piszemy, że $y = \mathcal{P}(x)$. Zbiór $\mathcal{P}(x)$ nazywamy **zbiorem potęgowym** zbioru x.

Sformułowane dotąd aksjomaty są bardzo naturalne, a także intuicyjnie jasne. Można zauważyć, że zbiory przez nie postulowane opisane są za pomocą pewnych formuł, jak na przykład zbiór potęgowy $\mathcal{P}(x)$, który jest opisany za pomocą formuły

$$z \in \mathcal{P}(x) \Longleftrightarrow (\forall u \in z) u \in x.$$

Nie każda formuła określa zbiór, na przykład nie istnieje taki zbiór y, że

$$\forall x (x \in y \Longleftrightarrow x \notin x).$$

Faktycznie, podstawiając $x = y$, otrzymalibyśmy formułę, która jest logicznie sprzeczna: $y \in y \Longleftrightarrow y \notin y$. Jest to tzw. **antynomia Russella**[3]. Aby jej uniknąć, wprowadzamy pewne ograniczenia na formuły, za pomocą których definiujemy nowe zbiory. Jeśli w formule Φ zmienne $p_1, \ldots, p_n$ nie występują w zasięgu kwantyfikatorów $\forall p_i$ lub $\exists p_i$, przy czym $i \leq n$, to piszemy, że $\Phi = \Phi(p_1, \ldots, p_n)$ i mówimy, że są to zmienne wolne w formule Φ. Jeśli formuła $\Phi = \Phi(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ spełnia następujący warunek

$$\forall p_1 \ldots \forall p_n \forall x \forall y \forall z (\Phi(x, y, p_1, \ldots, p_n) \wedge \Phi(x, z, p_1, \ldots, p_n) \Longrightarrow y = z), \qquad (*)$$

to mówimy, że taka **formuła jest funkcją**. Jeśli formuła $\Phi = \Phi(p_1, \ldots, p_n)$ jest funkcją, to jako aksjomat (zależny od Φ) przyjmujemy następujące zdanie:

(A7)$_\Phi$ Aksjomat zastępowania.

$$\forall p_i \ldots \forall p_n \forall u \exists v \forall y (y \in v \Longleftrightarrow (\exists x \in u) \Phi(x, y, p_1, \ldots, p_n)),$$

Aksjomat ten mówi, że jeśli dana formuła Φ jest funkcją, czyli spełnia warunek $(*)$, to formuła Φ przeprowadza dowolny zbiór w inny zbiór w tym sensie, że jeśli w formule $\Phi(x, y, p_1, \ldots, p_n)$ elementy x należą do pewnego zbioru, to te elementy y, dla których zachodzi ta formuła, też tworzą zbiór.

---

[3]Słynny paradoks Russella wywarł istotny wpływ na kształtowanie się aksjomatycznej teorii zbiorów. Polega on na tym, że jeśli przyjmiemy istnienie zbioru wszystkich zbiorów, powiedzmy u, to stosując do niego i do formuły $\Psi(x) \equiv (x \notin x)$ twierdzenie o wycinaniu (p. poniżej twierdzenie 6.1.1), otrzymamy taki zbiór $v = \{x \in u \colon \Psi(x)\}$, że $v \in v \Longleftrightarrow v \notin v$, co daje logiczną sprzeczność. W wersji anegdotycznej paradoks Russella mówi o tym, że w pewnym mieście (może w Sewilli) pewien golibroda postanowił, iż będzie golił wszystkich tych (i tylko tych), którzy sami się nie golą. Natrafił w ten sposób na nierozwiązywalny problem, bo nie mógł rozstrzygnąć, czy może się ogolić.

Aksjomatów teorii mnogości jest więc nieskończenie wiele, bo formuł teorii mnogości jest nieskończenie wiele. Ostatni aksjomat jest w istocie schematem dla nieskończenie wielu formuł nazywanych ogólnie aksjomatem zastępowania.

Kwestia niesprzeczności i niezależności aksjomatów teorii **ZFC** znajduje się poza tematyką tej książki. Zainteresowanych tym zagadnieniem, a także innymi aspektami teorii mnogości odsyłam do książek Jecha [242] i Kunena [292] oraz do trzytomowego dzieła pod redakcją Foremana i Kanamoriego pt. *Handbook of Set Theory.* Istnieją także inne aksjomatyki[4] teorii mnogości, a ponadto aksjomaty bywają formułowane w różnych wersjach i konfiguracjach. W szczególności Kuratowski i Mostowski [303] nie zakładają aksjomatu regularności. W zamian za to, aby zdefiniować liczby porządkowe i liczby kardynalne, wprowadzają aksjomat typów relacyjnych.

Do aksjomatów teorii **ZF** zalicza się zwykle aksjomat wyróżniania (lub wycinania). Można go też wyprowadzić z dotychczasowych aksjomatów.

TWIERDZENIE 6.1.1 (o wyróżnianiu). *Dla każdego zbioru u i każdej formuły $\Psi(x, p_1, \ldots, p_n)$ istnieje taki zbiór v, że $x \in v$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in u$ i zachodzi formuła $\Psi(x, p_1, \ldots, p_n)$, tzn.*

$$\forall u \exists v \forall y (y \in v \iff (y \in u \wedge \Psi(y, p_1, \ldots, p_n))).$$

DOWÓD. Wystarczy zastosować aksjomat $\mathbf{(A8)}_\Phi$ do formuły[5]

$$\Phi(x, y, p_1, \ldots, p_n) \equiv (\Psi(x, p_1, \ldots, p_n) \wedge x = y),$$

która w oczywisty sposób spełnia warunek $(*)$. $\square$

Zbiór v, o którym mowa w tym twierdzeniu, zapisujemy zwykle w postaci

$$\{x \in u \colon \Psi(x)\}.$$

Korzystając z twierdzenia o wycinaniu, możemy zdefiniować iloczyn i różnicę zbiorów, przyjmując

$$u \cap v = \{x \in u \colon x \in v\} \text{ oraz } u \setminus v = \{x \in u \colon x \notin v\}.$$

Z twierdzenia o wycinaniu wynika też możliwość zdefiniowania iloczynu nie tylko dwóch, a dowolnej niepustej rodziny zbiorów. A zatem, jeśli $w \neq \emptyset$, to przyjmujemy

$$\bigcap w = \{x \in a \colon (\forall b \in w)(x \in b)\},$$

gdzie a jest dowolnym elementem zbioru w. Zbiór $\bigcap w$ nazywamy **iloczynem** lub przecięciem (częścią wspólną) rodziny zbiorów w. Mamy równoważność

$$x \in \bigcap w \iff (\forall b \in w)(x \in b),$$

[4]W dodatku do cytowanej tu kilkukrotnie książki topologicznej Kelleya [271] opisany jest system aksjomatów teorii Morse'a–Kelleya (teorii **MK**), która jest wzmocnioną wersją teorii **NGB** von Neumanna–Bernaysa–Gödla.

[5]Ponieważ język formalny teorii mnogości nie jest tożsamy z językiem, którego używamy mówiąc o niej, to dla oznaczenia identyczności formuł używamy symbolu $\equiv$.

a więc na mocy aksjomatu ekstensjonalności definicja iloczynu zbiorów nie zależy od tego, który element zbioru w wybraliśmy, stosując twierdzenie o wyróżnianiu. Zauważmy, że jeśli $\emptyset \in w$, to $\bigcap w = \emptyset$. Nie ma jednak możliwości zdefiniowania iloczynu rodziny pustej.

Podobnie jak w przypadku aksjomatu wycinania, także występujący często wśród aksjomatów teorii mnogości aksjomat istnienia pary można uzyskać jako konsekwencję aksjomatu zastępowania.

TWIERDZENIE 6.1.2 (o parze). *Dla dowolnych a i b istnieje taki zbiór $v = \{a, b\}$, którego jedynymi elementami są a oraz b, tzn.*

$$\forall a \forall b \exists v \forall z (z \in v \iff z = a \vee z = b).$$

DOWÓD. Rozważmy formułę

$$\Phi(x, y) \equiv (x = \emptyset \wedge y = a) \vee (x = \mathcal{P}(\emptyset) \wedge y = b)$$

oraz zbiór $u = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Ponieważ $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$, to

$$\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z) \Longrightarrow y = z.$$

Na mocy aksjomatu zastępowania istnieje zatem taki zbiór v, że

$$y \in v \iff (\exists x \in u)(\Phi(x, y)).$$

Jedynymi elementami zbioru u są $\emptyset$ oraz $\mathcal{P}(\emptyset)$, a zatem jedynymi elementami zbioru v są a oraz b. To kończy dowód. $\square$

Z aksjomatu ekstensjonalności wynika, że zbiór v spełniający tezę tego twierdzenia jest jedyny. Oznaczamy go symbolem $\{x, y\}$ i nazywamy **parą** zbiorów x oraz y. Jeśli $x = y$, to parę $\{x, x\} = \{x\}$ nazywamy **singletonem**.

Korzystając z aksjomatu sumy i twierdzenia o parze, możemy zdefiniować sumę dwóch zbiorów wzorem

$$u \cup v = \bigcup \{u, v\},$$

czego nie mogliśmy wcześniej zrobić za pomocą twierdzenia o wyróżnianiu, tak jak to zrobiliśmy w przypadku iloczynu i różnicy. Posługując się pojęciem pary, możemy z aksjomatu regularności wyprowadzić twierdzenie, z którego w szczególności wynika, że zbiór wszystkich zbiorów nie istnieje[6]. Ze względu na antynomię odkrytą przez Russella nazwijmy to twierdzenie jego imieniem.

TWIERDZENIE 6.1.3 (twierdzenie Russella). *Jeśli $x \in y$, to $y \notin x$, tzn.*

$$\forall x \forall y (x \in y \Longrightarrow y \notin x).$$

W szczególności $x \notin x$ i nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów, tzn.

$$\neg \exists v \forall x (x \in v).$$

---

[6]Gdyby istniał zbiór wszystkich zbiorów, to teoria **ZF** byłaby sprzeczna. Faktycznie, jeśli istnieje taki zbiór v, że $\forall x (x \in v)$, to na mocy twierdzenia o wyróżnianiu istnieje zbiór $u = \{x \in v \colon x \notin x\}$. Wówczas $u \in u$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \notin u$, co daje logiczną sprzeczność.